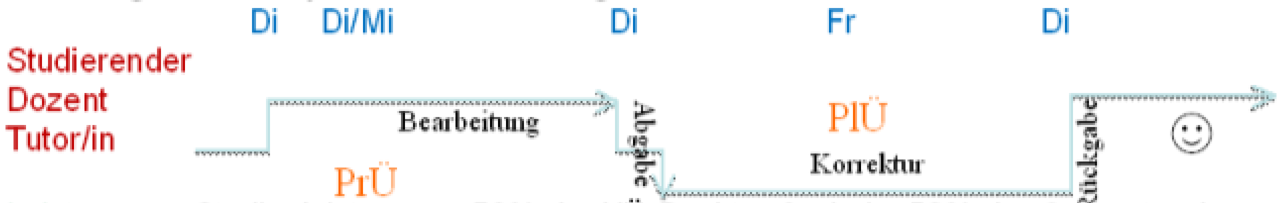
Mathematische Methoden der Physik

Crash-Kurs in der Sprache der Physik, mit Anwendungen in Newtonscher Mechanik

- Was? Vorlesung V (Lechtenfeld) / Präsenzübungen PrÜ (Tutoren) / Plenarübung PlÜ (Flohr)
- Wann? Di 12–14 & Fr 14–15 / Di 14, 16 oder Mi 08, 10, 12 / Fr 15–16
- V & PlÜ: Smartboard & Tafel, wird abgefilmt, Vorlesungsskript vorher und nachher
  Publikumsquiz mit eduvote.de: registrieren & App download; Uni hat Rahmenlizenz
- PrÜ: Auswahl einer Ü-Gruppe, Bearbeitung von Aufgaben unter Anleitung, Vorbereitung HÜ
- HÜ: Organisationszyklus der Hausübungen:



- Leistungen: Studienleistung = 50% der HÜ-Punkte & darin 50% der Computerübungen
  Prüfungsleistung = Bestehen der Klausur (oder der im zweiten Semester)
- Kommunikation: stud.IP www.uni-hannover.de/de/studium/elearning
  einiges auch auf meiner Homepage www.uni-hannover.de/~lechtenf/
  - Anmelden in einer Ü-Gruppe (wann und wo)
  - Herunterladen von Dateien (Skripten, Übungsblätter, Videos, Hand-Outs)
  - Umfragen (zu Ihren Vorkenntnissen, Evaluation von V, PrÜ und PlÜ)
  - Ankündigungen (Hinweise zu V, PlÜ, PrÜ und HÜ, aktuelle Änderungen)

... und natürlich ansprechbar: $\boxed{1}$ Ihr/e Tutor/in, $\boxed{2}$ Dr. Flohr, $\boxed{3}$ ich selbst

I. Vektoren

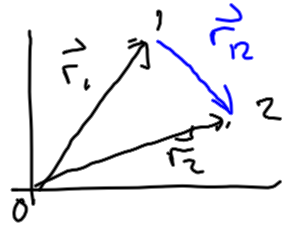
I.1 Richtung und Betrag

Ortsvektor = Pfeil vom Bezugspunkt (0) zu einem interessierenden Pkt

Notation: $\vec{r}$, $\vec{x}$, $\underset{\sim}{\vec{r}}$, $\mathbf{r}$

Verschiebevektor = Pfeil, der Punkt (1) mit Punkt (2) verbindet

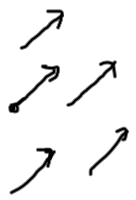
Notation: $\vec{r}_{12}$



Betrag = Länge des Vektors

(Norm) = nichtnegative Zahl, evtl. mit Einheit

Vereinfachung: Pfeilklassen (vergesse Aufpunkt)



Verschieben ändert nichts

Ausnahme: Ortsvektor

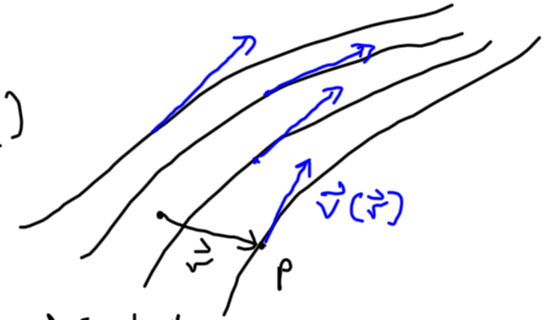
Betrag:

$|\vec{r}| = r$

$|\vec{V}| = V$

andere Situation:

an jedem Raumpunkt ein Repräsentant eines anderen Vektors



Physiker: $\vec{v}(\vec{r}_1) \neq \vec{v}(\vec{r}_2)$

„Vektorfeld"

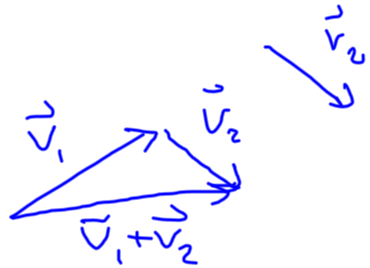
Mathematiker: $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow$ Vektorraum
$p \longmapsto \vec{v}(p)$

3 Eigenschaften:

(i) Multiplikation mit Zahl $\in \mathbb{R}$

(ii) Addition zweier Vektoren

(iii) Verhalten unter Drehungen



<u>zu (i)</u>

Zahl × Vektor = Vektor mit verändertem Betrag

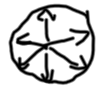
z.B. $-1{,}5\,m \times \nwarrow 3\,s^{-1} = \searrow 4.5\,m/s$

Notation: $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ Gegenvektor zu $\vec{a}$

Einheitsvektor = Vektor × $\frac{1}{\text{Betrag}}$ hat Betrag = 1

$\vec{e} = \frac{1}{a}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ sodass $|\vec{e}| = 1$

und $\vec{a} = a\,\vec{e}$

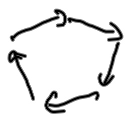
$\exists$ Einheitsvektor für jede Richtung 

<u>zu (ii)</u>

kommutativ

assoziativ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Nullvektor $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$

Notation $\vec{0} = 0$  $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e} = 0$

1. Definition von Vektoren (weite)

Vektoren = Elemente eines Vektorraums V

über einem Körper $\mathbb{R}$

definiert durch Axiome: (1.1)

A) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \quad \exists$ Addition $\vec{a}+\vec{b} \in V$ mit

1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativität
2) $\exists \vec{0} : \quad \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ Nullvektor
3) $\forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}) : \quad \vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ Gegenvektor
4) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Kommutativität

$\left.\right\}$ $(V,+)$ ist kommutative Gruppe

B) $\forall \vec{a} \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists$ Skalarmultiplikation $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \in V$ mit

1) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a} + \alpha\cdot\vec{b}$ Distributivität
2) $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$ Assoziativität
3) $\exists\, 1 : \quad 1\cdot\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ Einselement

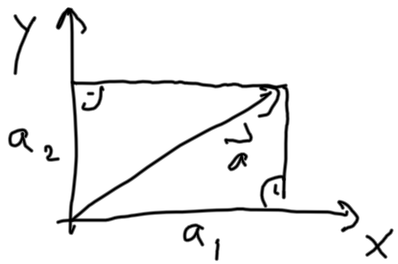
alle Objekte, die diesen Axiomen genügen, sind <u>Vektoren</u>

Komponenten

Geometrie → Algebra

zum Abmessen brauchen wir ein Bezugssystem

Der Vektor ist davon unabhängig!

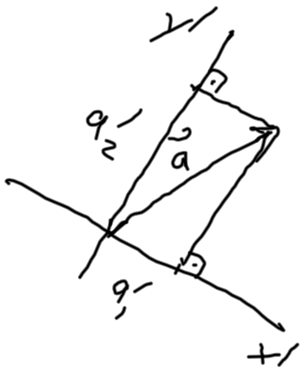


kartesisches Koordinatensystem

$\vec{a} \doteq (a_1, a_2)$

Vektor $\vec{a}$ hat in unserem K-System die Komponenten a_1 & a_2

In einem anderen K-System hat er andere Komponenten a_1' & a_2'



Ortsvektor: $\vec{r} \doteq (x, y)$

gegeben ein Vektor in Komponenten, z.B. im $\mathbb{R}^3$

$$\vec a \doteq (a_1, a_2, a_3)$$

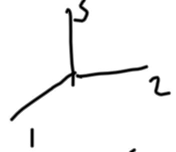
- Betrag: $|\vec a| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (1.2)
- Vielfaches: $\lambda \vec a \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ (1.3)
- Summe: $\vec a + \vec b \doteq (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ (1.4)

- Basisvektoren:

Einheitsvektoren in Richtung der Koord-Achsen:

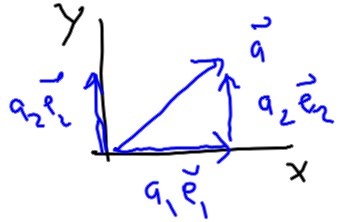
$\vec e_1 \doteq (1, 0, 0)$, $\vec e_2 \doteq (0, 1, 0)$, $\vec e_3 \doteq (0, 0, 1)$

Rechtssystem



- Zerlegung eines Vektors

$$\vec a = \vec e_1 a_1 + \vec e_2 a_2 + \vec e_3 a_3 \quad (1.5)$$



Kollinearität

$\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear, falls $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$$

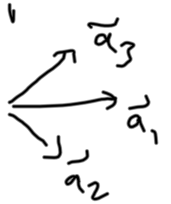
(d.h. $\vec{a}, \vec{b}$ sind parallel oder antiparallel)

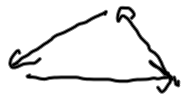
Spezialfall von:

Lineare Abhängigkeit:

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ sind linear <u>unabhängig</u> falls

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0$ impliziert, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$





$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$$

<u>zu (iii):</u>

Verhalten der Komponenten unter passiven Drehungen erlaubt eine feinere Unterteilung von Vektoren...

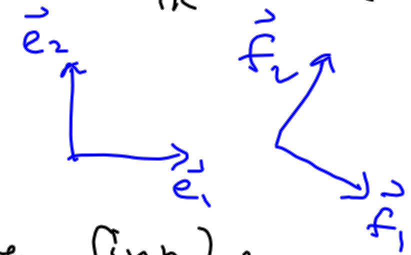
2. Definition von Vektoren (normierten):

Vektoren sind Elemente eines normierten Vektorraums deren Komponenten linear in $\{\cos\varphi_{ik}\}$ transformieren unter einer Koordinatendrehung

$$\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3} \longrightarrow \{\vec{f}_k\}_{k=1,2,3} \quad \text{mit } \varphi_{ik} = \sphericalangle(\vec{f}_k, \vec{e}_i)$$

$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2) \leadsto \vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2$$

$$\vec{a} \doteq (a_1', a_2') \leadsto \vec{a} = \vec{f}_1 a_1' + \vec{f}_2 a_2'$$



dies unterscheidet Vektoren (im engeren Sinn) von

Komponenten:

- Skalaren: transformieren <u>nicht</u>
- Tensoren: transformieren mit höheren Potenzen von $\{\cos\varphi_{ik}\}$
- Spinoren: transformieren linear in $\{\cos\frac{1}{2}\varphi_{ik}\}$

Feinere Unterscheidung durch Spiegelung des K-Systems am Ursprung:

(a_1, a_2, a_3)	$\longrightarrow$	$(-a_1, -a_2, -a_3)$	Vektor
(a_1, a_2, a_3)	$\longrightarrow$	(a_1, a_2, a_3)	Pseudovektor
α	$\longrightarrow$	α	Skalar
α	$\longrightarrow$	$-\alpha$	Pseudoskalar

I.2 Skalarprodukt

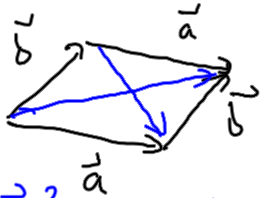
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine Zahl (Skalar)

soll linear sein in $\vec{a}, \vec{b}$, symmetrisch $(\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a})$

haben bereits Betrag (Norm) $|\vec{a}| = a$

Idee: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

Parallelogramm-Gesetz: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2a^2 + 2b^2$



Skalarprodukt:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 =: 4\,\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\rightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ ✓

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}\right\} \text{gilt ebenfalls}$$

Skalarprodukt in Komponenten:

Einheitsvektoren:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad$ etc.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \cdot (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3)$$

$$= \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_1 \cancel{a_1 \cdot \vec{e}_2} b_2 + \vec{e}_1 \cancel{a_1 \cdot \vec{e}_3} b_3$$
$$+ \cancel{\vec{e}_2 a_2 \cdot} \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_2 \cancel{a_2 \cdot \vec{e}_3} b_3$$
$$+ \cancel{\vec{e}_3 a_3 \cdot} \vec{e}_1 b_1 + \cancel{\vec{e}_3 a_3 \cdot} \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 a_3 \cdot \vec{e}_3 b_3$$

$$= a_1 b_1 + 0 + 0$$
$$+ 0 + a_2 b_2 + 0$$
$$+ 0 + 0 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1.6)$$

merke: Komponenten sind basisabhängig, Skalarprodukt nicht!

Spezialfall: $\vec{b} = \vec{a} \curvearrowright \vec{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

geometrisch:

$$(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b) = |\vec a+\vec b|^2$$

$$\vec a\cdot\vec a+\vec b\cdot\vec b+2\,\vec a\cdot\vec b \qquad \text{Längenquadrat von } \vec a+\vec b$$

$$a^2+b^2+2\,\vec a\cdot\vec b \qquad \overset{\text{NR}}{=}\ a^2+b^2+2ab_{\parallel}$$

NR:

$$|\vec a+\vec b|^2 = (a+b_\parallel)^2+b_\perp^2$$
$$= a^2+2ab_\parallel+\underbrace{b_\parallel^2+b_\perp^2}$$
$$= a^2+2ab_\parallel+b^2$$

$$\frac{b_\parallel}{b} = \cos\varphi$$

Vergleich: $\vec a\cdot\vec b = ab_\parallel$

Trigonometrie: $\vec a\cdot\vec b = ab\cos\varphi$

wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec a,\vec b)$ $\Big\}$ (1.7)

auch richtig: $\vec a\cdot\vec b = a_\parallel b$

Vorzeichen: $\vec a\cdot\vec b<0$ wenn Winkel stumpf

Winkel: $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b) = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{ab} = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\sqrt{\vec a\cdot\vec a\ \ \vec b\cdot\vec b}}$

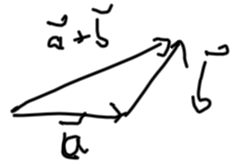
orthogonal: $\vec a\perp\vec b \iff \vec a\cdot\vec b=0$

kollinear: $\vec a\parallel\vec b \iff \vec a\cdot\vec b = ab$ oder $-ab$

Projektion: $\vec a = \vec e_1a_1+\vec e_2a_2+\vec e_3a_3 \iff a_i = \vec a\cdot\vec e_i \quad i=1,2,3$

Anwendungen in Geometrie:

- Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le ab$ (1.8)
- Dreiecksungleichung: $|a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b$ (1.9)



- Kosinussatz:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$c^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= a^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2$$

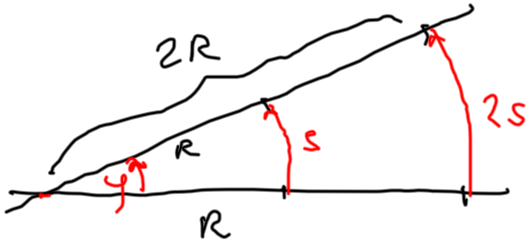
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Orthogonal-Zerlegung

$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ relativ zu einem $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot\vec{F} = v F_{\parallel} \leadsto F_{\parallel} = \frac{\vec{v}}{v}\cdot\vec{F} \leadsto \vec{F}_{\parallel} = F_{\parallel}\frac{\vec{v}}{v} = \left(\vec{F}\cdot\frac{\vec{v}}{v}\right)\frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$$

über Winkel:



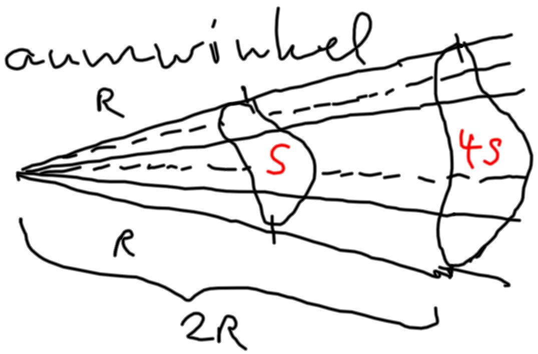
$\varphi = s/R$ dimensionslos

$s = R \cdot \varphi$

Vollwinkel  $\varphi = 2\pi$

rechter Winkel  $\varphi = \pi/2$

Raumwinkel



S = Flächeninhalt eines Stücks Kugelschale

$\Omega = S/R^2$

Form der Fläche egal

I.3 Kreuzprodukt

elektr. gel. Teilchen, Geschw. $\vec{v}$, im Magnetfeld $\vec{B}$,
spürt Kraft $\vec{F}$ experimentell:

$$\vec{F} \perp \vec{v}, \quad \vec{F} \perp \vec{B}, \quad F = q v B_\perp$$

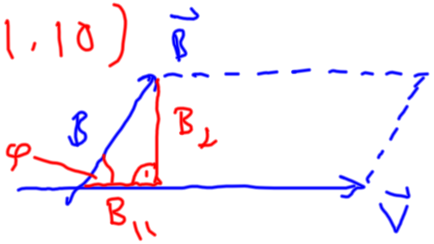
Anteil $\perp \vec{v}$

$(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ bilden ein Rechtssystem

Daumen, Zeige-, Mittel-Finger

dies definiert das Kreuzprodukt

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \qquad (1.10)$$



Betrag von $\vec{F}$? Berechne $B_\perp$

$B_\parallel = B \cos \varphi$

$B_\perp = B \sin \varphi$

Test: $B_\parallel^2 + B_\perp^2 = B^2$ ✓

also: $F = q v B \sin \varphi$

$= q \cdot$ (Inhalt des von $\vec{v}$ & $\vec{B}$ erzeugten Parallelogramms)

Def.:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}\times\vec{b} = \vec{e}\; ab \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ &\vec{e}\perp(\vec{a},\vec{b}),\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{e})\ \text{Rechtssystem} \end{aligned}\right\}\quad (1.11)$$

merke: nur in 3 Dimensionen!

Eigenschaften:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad \text{antisymmetrisch}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{a} = 0$$

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0, \quad \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

in $(\vec{b},\vec{c})$-Ebene   in $(\vec{a},\vec{b})$-Ebene

Kreuzprodukt in Komponenten:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \times (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3)$$

$$\begin{aligned} = {} & \cancel{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 a_1 b_1} + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 a_1 b_2 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 a_1 b_3 \\ & + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 a_2 b_1 + \cancel{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 a_2 b_2} + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 a_2 b_3 \\ & + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 a_3 b_1 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 a_3 b_2 + \cancel{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 a_3 b_3} \end{aligned}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

Schema!

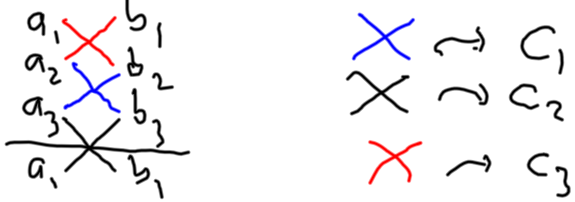
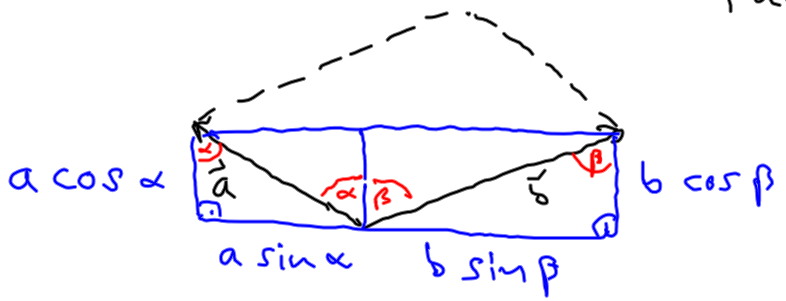


Tabelle $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
2	$-\vec{e}_3$	0	$\vec{e}_1$
3	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	0

Anwendung in der Geometrie: Additions-Theorem



$$A_{\square} = A_{\diamond}$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$A_{\square} = A_{\square} + A_{\square}$$

$$= a \sin \alpha \cdot b \cos \beta + a \cos \alpha \cdot b \sin \beta$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Entwicklungssatz oder „bac – cab"-Regel

Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (1.13)$$

Beweis:

- wissen, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in (\vec{b}, \vec{c})$-Ebene
- also: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ finde β & γ
- skalar multipliziere mit $\vec{a}$:

$$0 = \beta\, \vec{a}\cdot\vec{b} + \gamma\, \vec{a}\cdot\vec{c}$$

- Lösung: $\beta = \lambda\, \vec{a}\cdot\vec{c}$, $\gamma = -\lambda\, \vec{a}\cdot\vec{b}$ finde λ

$\longrightarrow$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda\, \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \lambda\, \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

- Spezialfall: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}_1$, $\vec{c} = \vec{e}_2$

$$\vec{e}_1 \times \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3} = \lambda\, \vec{e}_1 \underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)}_{=0} - \underbrace{\lambda\, \vec{e}_2 (\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)}_{=\lambda\vec{e}_2}$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \qquad 0 \qquad -\lambda\vec{e}_2$$

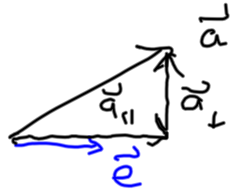
$\rightsquigarrow$ $\lambda = 1$ q.e.d.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0 \qquad (1.14)$$

Jacobi-Identität

Orthogonal-Zerlegung von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{e}$

$\vec{a}=\vec{a}_{\parallel}+\vec{a}_{\perp}$ bzgl. $\vec{e}$



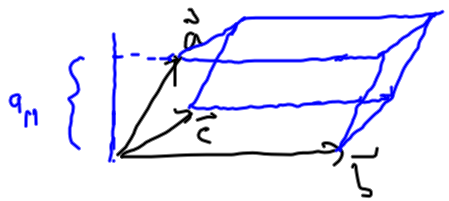
$\vec{e}\cdot\vec{e}=1$

$$(1.15)\ \begin{cases}\vec{a}_{\parallel}=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}\\ \vec{a}_{\perp}=\vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})\overset{(1.13)}{=}\vec{a}(\vec{e}\cdot\vec{e})-\vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}_{\parallel}\end{cases}$$

mehrfache Produkte

$$(1.16)\ \begin{cases}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\\ (\vec{a}\times\vec{b})^2=a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=a^2b^2(1-\cos^2\varphi)=(ab\sin\varphi)^2\end{cases}$$

(1.17) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_{\parallel}\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|=$ Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats



„Spatprodukt"

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

in Komponenten

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \qquad (1.18)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Summe über alle Permutationen der Indizes 1, 2, 3 mit Gewicht $= \begin{cases} +1 & \text{gerade Perm.} \\ -1 & \text{ungerade Perm.} \end{cases}$

Rechenschema:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

—— : +1

- - - : −1

„Sarrus-Regel“

I.4 Index-Schreibweise

Skalarprodukt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{matrix} \right\} =: \delta_{ij}$$

Tabelle δ_{ij}

$j \backslash i$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

Kronecker-Symbol

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_{i=j=1}^{3} a_i b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \qquad (1.6')$$

Kreuzprodukt

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, c_k^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, \varepsilon_{kij}$$

Levi-Civitá-Symbol (ε-Symbol)

ε ist $= 0$ falls 2 Indizes gleich sind

ε ist $\neq 0$ für

$k\,i\,j$	ε_{kij}
1 2 3	+1
1 3 2	−1
2 3 1	+1
2 1 3	−1
3 1 2	+1
3 2 1	−1

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}\, a_i b_j$$

$$(1.12') \qquad = \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, \varepsilon_{kij}} a_i b_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e}_k \, \varepsilon_{kij} \, a_i b_j$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{kij} \, a_i b_j \qquad (1.12'') \qquad k = 1, 2, 3$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_\ell = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{e}_\ell = \sum_{i,j,k} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_\ell \, \varepsilon_{kij} \, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j,k} \delta_{k\ell} \, \varepsilon_{kij} \, a_i b_j \underset{\uparrow}{=} \sum_{i,j} \varepsilon_{\ell ij} \, a_i b_j$$

nur Summand $k = \ell$ überlebt in Σ_k

Spatprodukt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \sum_{k=1}^{3} a_k (\vec{b} \times \vec{c})_k = \sum_{k,i,j=1}^{3} a_k \, \varepsilon_{kij} \, b_i c_j$$

$$(1.18') \qquad = \sum_{k,i,j=1}^{3} \varepsilon_{kij} \, a_k b_i c_j = \text{Determinante } |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$$

Rechenregeln / Eigenschaften

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

$$\sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \qquad \sum_{i,j} \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_i \delta_{ii} = 3 \quad (1.19)$$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.20)$$

$$\rightarrow \sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (1.13')$$

dies ist das Gleiche wie „bac-cab" oder $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c}\,\vec{b}\cdot\vec{d} - \vec{a}\cdot\vec{d}\,\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$\rightarrow \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \longrightarrow \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

Einsteinsche Summationskonvention: lasse Σ weg